ЗАДАЦИ – V НЕДЕЉА

1. Користећи основну теорему алгебре доказати да се сваки полином може записати као производ полинома степена 1. Закључити одатле да сваки полином (са коефицијентима у $\mathbb{C}$) степена n има тачно n комплексних нула.

2. Доказати да Болцано–Вајерштрасова теорема повлачи (АРХ) $\wedge$ (КАН).

3. Нека је $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ низ уметнутих интервала, т.д. $(\forall \varepsilon>0)(\exists n_0\in\mathbb{N})(\forall n\geq n_0)\ \mathrm{diam}(I_n)<\varepsilon$. Доказати да је тада $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n=\{a\}$ за неко $a\in\mathbb{R}$.

4. Нека је $n\in\mathbb{N}$. Доказати да је пресликавање $\psi_n:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ задато са $\psi_n(x)=x^n$, строго растуће.

5. Доказати да $a,b>0$, $p,q\in\mathbb{Q}$ важи:
   а) $a<b \Rightarrow a^p<b^p$
   б) $a>1 \wedge q<p \Rightarrow a^q<a^p$
   в) $a<1 \wedge q<p \Rightarrow a^q>a^p$

6. Доказати да је $(S^1,\cdot)$ Абелова група.

7. Наћи тачке нагомилавања скупова:
   - $A=\{z\in\mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\, z>0 \wedge |z|\leq 1\}$
   - $B=\{z\in\mathbb{C} \mid 0<|z|<1\}\cup\{1+i\}$.

8. Доказати да је ротација за $\eta\in S^1$, тј. $r_\eta: S^1\to S^1$, $z\to\eta\cdot z$ изометрија. Закључити да r_η чува дужине лукова.

9. Доказати Моаврову формулу:

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha.$$

10. Користећи Моаврову формулу доказати:

$$\sin 3\alpha = -4\sin^3\alpha + 3\sin\alpha$$
$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

11. Израчунати $(1+i)^{20}$.